DAVLAT TEST MARKAZI

Bilimingga ishon va muvaffaqiyatga erish!

КАБИНЕТ МИНИСТРОВ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ, АКАДЕМИЧЕСКИХ ЛИЦЕЕВ И ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОЛЛЕДЖЕЙ – УЧАСТНИКОВ IV (РЕСПУБЛИКАНСКОГО) ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРЕДМЕТАМ

КНИГА ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ПО ПРЕДМЕТУ

МАТЕМАТИКА

Фамилия, имя, отчество участника *Подпись*

вариант 3

Данный тестовый вариант состоит из 30 (1-30) тестовых заданий.
В книгу включены тестовые задания закрытого и открытого типа. Для оценивания каждого тестового задания отводится балл, отражённый в задании.
При решении тестовых заданий закрытого типа необходимо из 4-х предложенных вариантов ответов выбрать только один и в листе ответов на соответствующей номеру задания строке написать букву выбранного ответа (A, B, C или D).
Ответы на тестовые задания открытого типа необходимо написать чётко и ясно в соответствующей номеру задания строке листа ответов.
Для закрытых тестовых заданий (28, 29, 30), требующих установления соответствия, даны шесть общих вариантов ответов (A-F), среди которых в соответствующем порядке необходимо выбрать по одному правильному ответу и отметить в листе ответов.

1. [2,4 ball]

Для действительных чисел a, b и c верны равенства $\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{ba}{b+c}+\dfrac{cb}{c+a}=-9$ и $\dfrac{bc}{a+b}+\dfrac{ca}{b+c}+\dfrac{ab}{c+a}=10$.

Найдите значение выражения $\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a}$**.**

A) *13*

B) *19*

C) *17*

D) *11*

2. [1,7 ball]

Вычислите:

$$\begin{aligned}
&1\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+7\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+9\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+11\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+13\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+15\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+17\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\\
&+19\cdot\left(\frac{1}{10}\right)
\end{aligned}$$

A) *50*

B) *45*

C) *55*

D) *66*

3. [2,4 ball]

Вычислите: $\operatorname{tg} 1^\circ + 2\operatorname{tg} 2^\circ + 4\operatorname{tg} 4^\circ + 8\operatorname{tg} 8^\circ +$
$+16\operatorname{tg} 16^\circ + 32\operatorname{tg} 58^\circ$.

A) $\operatorname{ctg} 1^\circ$

B) $\operatorname{tg} 64^\circ$

C) $\operatorname{tg} 1^\circ$

D) $\operatorname{ctg} 64^\circ$

4. [1,7 ball]

Дано равенство $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$.

Найдите значение $\frac{y}{x}$**.**

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

5. [1,7 ball]

x_0 является действительным корнем уравнения $\frac{27 \cdot 9^x}{4^x} = \frac{3^x}{8^x}$.

Найдите значение $2^{-(1+\log_2 3)x_0}$**.**

A) *9*

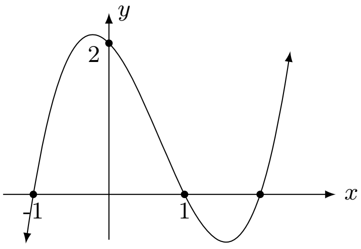
B) *4*

C) *27*

D) *8*

6. [1,7 ball]

На рисунке изображён график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



По данным графика, найдите количество целых различных значений коэффициента a.

A) *2*

B) *1*

C) *бесконечно много*

D) *4*

7. [2,4 ball]

При $x \neq 0$ верно равенство $3 \cdot f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x$.

Найдите сумму всех различных действительных корней уравнения $f(x) = 2$.

A) $\frac{1}{3}$

B) $-\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $-\frac{2}{3}$

8. [2,4 ball]

Дана функция $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

Вычислите $f'(x)$.

A) $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

B) $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

C) $(\cos x)^{\sin x}\left(\sin x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

D) $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) - \operatorname{tg} x\right)$

9. [0,9 ball]

При $x \neq 0$ верно равенство $3 \cdot f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x$. График одной из первообразных функции $f(x)$ проходит через точку $A(1;2)$.

Найдите эту первообразную функции $f(x)$**.**

A) $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}$

B) $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}$

C) $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$

D) $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2}$

10. [2,4 ball]

Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

A) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$

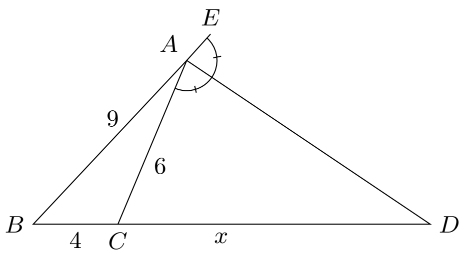
B) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$

C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$

D) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$

11. [0,9 ball]

На данном рисунке $AB = 9$, $AC = 6$ и $BC = 4$. Отрезок AD является биссектрисой угла CAE. Точки B, A и E лежат на одной прямой.



Найдите длину $CD = x$**.**

A) *9*

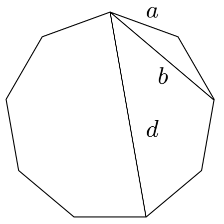
B) *8*

C) *7*

D) *10*

12. [2,4 ball]

Сторона правильного девятиугольника, изображённого на рисунке, равна a, его наименьшая диагональ равна b, а наибольшая диагональ равна d.



По имеющимся данным определите, какое из следующих равенств ВСЕГДА ВЕРНО для a, b и d.

A) $d^2 = a^2 + b^2$

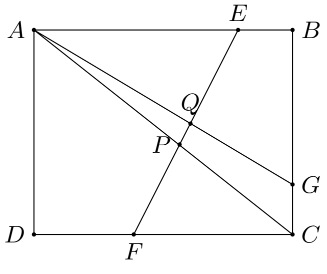
B) $b = \dfrac{a+d}{2}$

C) $d = a + b$

D) $b^2 = ad$

13. [0,9 ball]

В прямоугольнике $ABCD$ длины AB=5, BC=4, $EB = CG$=1, DF=2, отрезки AG и AC пересекают отрезок EF в точках Q и P (рисунок).



Найдите $\dfrac{PQ}{FE}$.

A) $\dfrac{11}{91}$

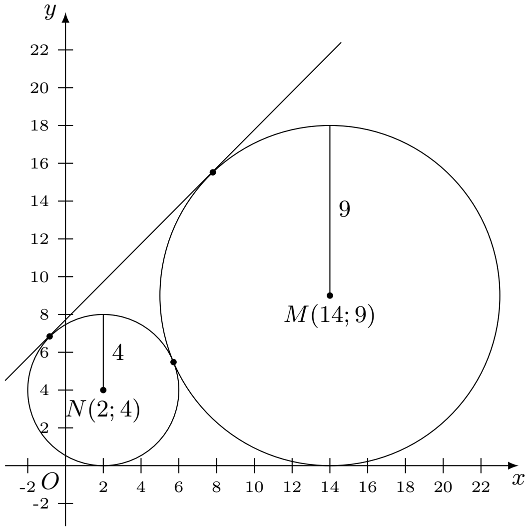
B) $\dfrac{12}{91}$

C) $\dfrac{10}{91}$

D) $\dfrac{9}{91}$

14. [2,4 ball]

На рисунке изображены две касающиеся окружности с радиусами равными 4 и 9. Центры окружностей находятся в точках $N\,(2;4)$ и $M\,(14;9)$.



Найдите координаты точки пересечения общей для данных двух окружностей касательной (отличной от оси Ox) с осью Oy.

A) $\left(0;\dfrac{911}{119}\right)$

B) $\left(0;\dfrac{922}{119}\right)$

C) $\left(0;\dfrac{913}{119}\right)$

D) $\left(0;\dfrac{912}{119}\right)$

15. [0,9 ball]

Среди натуральных четырёхзначных чисел выбраны такие, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры и каждая из этих трёх одинаковых цифр больше оставшейся четвёртой цифры.

Определите, сколько всего таких чисел.

A) *162*

B) *153*

C) *180*

D) *171*

16. [1,7 ball]

В правильном семиугольнике случайным образом выбраны две тройки различных вершин. Вершины в разных тройках также **НЕ** повторяются.

Определите, какова вероятность того, что два треугольника с вершинами в выбранных тройках НЕ ИМЕЮТ пересекающихся сторон.

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{19}{70}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{3}{14}$

17. [0,9 ball]

Даны 2024 множества, каждое из которых состоит из 135 элементов. Объединение любых двух из этих множеств состоит из 269 элементов.

Определите, какое НАИБОЛЬШЕЕ возможное количество элементов может содержать объединение всех этих 2024 множеств.

A) $2024 \cdot 135 - 2023$

B) $2024 \cdot 135 - 1$

C) $134 \cdot 2023 + 1$

D) $134 \cdot 2023 + 136$

18. [0,9 ball]

Вычислите: $\dfrac{2022^3 - 2021^3 - 1}{2021 \cdot 2022}$

Ответ: ______________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

19. [1,7 ball]

Произведение некоторого двузначного натурального числа x и двузначного числа, полученного путём перестановки цифр числа x, равно 2430.

Найдите сумму цифр этого числа x.

Ответ: ______________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

20. [0,9 ball]

Дано равенство $3\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = a\cos\dfrac{\pi}{b}$ $(a, b \in N)$

Найдите $a + b$.

Ответ: ______________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

21. [1,7 ball]

Даны равенства $\dfrac{8a^2}{a^2+9}=b$, $\dfrac{10b^2}{b^2+16}=c$ и $\dfrac{6c^2}{c^2+25}=a$. Здесь $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

Найдите значение $a+b+c$.

Ответ: ______________________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

22. [0,9 ball]

Дано уравнение $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(x-2\sqrt{x-2}+2\right)=9$.

Найдите сумму всех действительных корней (или корень, если он единственный) данного уравнения.

Ответ: ______________________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

23. [1,7 ball]

Для положительных действительных чисел x, y, z верна система уравнений

$$\begin{cases} xyz=1 \\ x+\dfrac{1}{z}=5 \\ y+\dfrac{1}{x}=29 \\ z+\dfrac{1}{y}=\dfrac{m}{n} \end{cases}$$

и натуральные числа m, n являются взаимно простыми.

Найдите значение $m+n$.

Ответ: ______________________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

24. [2,4 ball]

Дано уравнение $x^4=\dfrac{11x-6}{6x-11}$.

Найдите сумму различных действительных корней данного уравнения.

Ответ: ______________________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

25. [2,4 ball]

Дано неравенство $\dfrac{(x+1)^4}{x\left(x^2+1\right)}<\dfrac{128}{15}$.

Найдите среднее арифметическое всех целых решений этого неравенства, принадлежащих промежутку $[-2;100)$.

Ответ: ______________________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

26. [0,9 ball]

При $x \neq 0$ верно равенство $f\left(x\right) + 2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$.

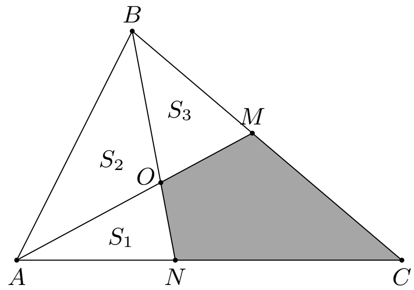
Найдите произведение всех действительных корней уравнения $f'\left(x\right) = -4$.

Ответ: ____________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

27. [1,7 ball]

На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Площади треугольников AON, AOB и BOM соответственно равны $S_1 = 6$, $S_2 = 12$ и $S_3 = 8$.



Найдите площадь четырёхугольника $NCMO$ (закрашенного на рисунке).

Ответ: ______________________________

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

28-30.

По приведённым ниже данным, решите тестовые задания номер 28, 29, 30.

На рисунке изображено лекарство в двух формах. На рисунке 1 изображена капсула, боковые части которой являются половинами шара, а центральная часть цилиндром. Общая длина капсулы равна 2 cm, а диаметр основания цилиндра (капсулы) равен 0,5 cm. На рисунке 2 изображена таблетка в форме цилиндра, высота которого 0,5 cm. Площади полных поверхностей капсулы и таблетки равны.

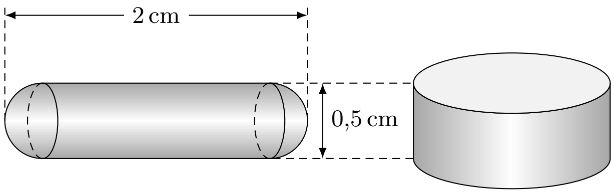


рисунок 1 рисунок 2

Задания	Ответы
28. [0,9 ball] **Найдите** радиус (cm) основания таблетки, изображённой на рисунке 2.	A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$
29. [1,7 ball] **Найдите** площадь (cm^2) боковой поверхности таблетки, изображённой на рисунке 2. (Примите $\pi \approx 3$).	C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$
30. [2,4 ball] **Найдите** объём (cm^3) таблетки, изображённой на рисунке 2. (Примите $\pi \approx 3$).	E) $2\frac{1}{4}$ F) $1\frac{1}{2}$