

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ,
АКАДЕМИЧЕСКИХ ЛИЦЕЕВ И ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОЛЛЕДЖЕЙ –
УЧАСТНИКОВ IV (РЕСПУБЛИКАНСКОГО) ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ
ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРЕДМЕТАМ

КНИГА ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ПРЕДМЕТУ
МАТЕМАТИКА

Фамилия, имя, отчество участника

Подпись

Данный тестовый вариант состоит из 30 (1-30) тестовых заданий.

В книгу включены тестовые задания закрытого и открытого типа. Для оценивания каждого тестового задания отводится балл, отражённый в задании.

При решении тестовых заданий закрытого типа необходимо из 4-х предложенных вариантов ответов выбрать только один и в листе ответов на соответствующей номеру задания строке написать букву выбранного ответа (А, В, С или D).

Ответы на тестовые задания открытого типа необходимо написать чётко и ясно в соответствующей номеру задания строке листа ответов.

Для закрытых тестовых заданий (28, 29, 30), требующих установления соответствия, даны шесть общих вариантов ответов (А-Ф), среди которых в соответствующем порядке необходимо выбрать по одному правильному ответу и отметить в листе ответов.

1. [2,4 ball]

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$, при $x \in R$.

- A) $2\sqrt{2}$
- B) $\sqrt{5}$
- C) $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$
- D) 3

2. [1,7 ball]

Если в $\{a_n\}$ арифметической прогрессии $a_1 = \log_{12}162$, $a_2 = \log_{12}b$, $a_3 = \log_{12}c$, $a_4 = \log_{12}d$, $a_5 = \log_{12}1250$, то найдите значение b .

- A) $15\sqrt{30}$
- B) 270
- C) $25\sqrt{3}$
- D) 90

3. [2,4 ball]

Если $\arctg\left(\frac{1}{1+1+1^2}\right) + \arctg\left(\frac{1}{1+2+2^2}\right) + \arctg\left(\frac{1}{1+3+3^2}\right) + \dots + \arctg\left(\frac{1}{1+2023+2023^2}\right) = x$, то найдите значение $\operatorname{tg} x$.

- A) $\frac{2023}{2024}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{2023}{2025}$

4. [1,7 ball]

Найдите **сумму действительных корней** уравнения $\left| \frac{18+x}{9} \right|^{\log_3 \left| 2 + \frac{x}{9} \right|} = 81$.

- A) 135
- B) -198
- C) -72
- D) 72

5. [1,7 ball]

Сколько **действительных корней** имеет уравнение $222^{3x} + 222^x = 222$?

- A) 1
- B) Не имеет действительных корней
- C) 2
- D) 3

6. [1,7 ball]

Какое из данных утверждений **ВЕРНО** относительно функции $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$?

- A) область значений функции состоит только из положительных чисел
- B) чётная функция
- C) является убывающей на всей области определения
- D) нечётная функция

7. [2,4 ball]

Если для функции $y = f(x)$ верно равенство $f\left(\frac{x-3}{1+x}\right) + f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) = x$, то **какая из данных функций** является функцией $f(x)$?

- A) $f(x) = \frac{x^3 + 7x}{(x^2 - 1)}$
- B) $f(x) = \frac{x^3 + 7x}{2 \cdot (1 - x^2)}$
- C) $f(x) = \frac{x^3 + 7x}{2 \cdot (x^2 - 1)}$
- D) $f(x) = \frac{x^3 + 7x}{(1 - x^2)}$

8. [2,4 ball]

Если $f(x) = x^{\ln x} \cdot e^x \cdot \operatorname{arctg} x$, то найдите значение $f'(1)$.

- A) e
- B) $\frac{e \cdot (\pi + 1)}{4}$
- C) $\frac{e \cdot \pi}{4}$
- D) $\frac{e \cdot (\pi + 2)}{4}$

9. [0,9 ball]

Вычислите $\int_0^1 \frac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2} dx$.

- A) $\ln 2$
- B) $\ln 4$
- C) $2 - \ln 2$
- D) $2 - \ln 4$

10. [2,4 ball]

Вычислите определённый интеграл $\int_1^2 \frac{9x + 4}{x^5 + 3x^2 + x} dx$.

- A) $\ln \sqrt{10}$
- B) $\ln 4$
- C) $\ln \frac{80}{23}$
- D) $\ln \frac{40}{23}$

11. [0,9 ball]

В треугольнике ABC на сторонах AB , BC , CA соответственно построены точки M , N , K таким образом, что $AM : AB = BN : BC = CK : AC = 1 : 4$.

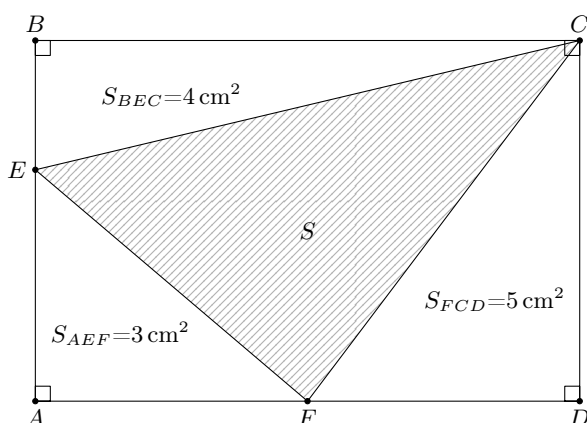
Если площадь треугольника MNK равна 42 см^2 , то найдите площадь (см^2) треугольника ABC .

- A) 96
- B) 126
- C) 105
- D) 56

12.

[2,4 ball]

На рисунке изображён прямоугольник $ABCD$. Здесь точки E и F лежат на сторонах AB и AD соответственно.



Если $S_{AEF} = 3 \text{ cm}^2$, $S_{BEC} = 4 \text{ cm}^2$ и $S_{FCD} = 5 \text{ cm}^2$, то найдите площадь (cm^2) треугольника ECF , заштрихованного на рисунке.

- A) 10
- B) 12
- C) 16
- D) 8

13.

[0,9 ball]

В треугольнике ABC отношение длин сторон $|AC| : |AB| = 3 : 4$, а биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K .

Найдите длину отрезка AK (см), если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AC} + 3 \cdot \overrightarrow{AB}$ равна 210 см.

- A) 21
- B) 30
- C) 17,5
- D) 42

14.

[2,4 ball]

В треугольнике ABC точки M , N , K являются серединами сторон BC , AC , AB соответственно.

Если $3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BN} + 5\overrightarrow{CK} = \vec{a} (2; 1)$, то найдите длину стороны AC данного треугольника.

- A) $\sqrt{5}$
- B) $2\sqrt{5}$
- C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
- D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

15. [0,9 ball]

Каждая грань куба пронумерована цифрами начиная с 1 до 6 включительно (игральная кость). Какова вероятность того, что при броске двух таких кубов, **сумма выпавших цифр будет равна 6**?

- A) $\frac{1}{9}$
 B) $\frac{29}{216}$
 C) $\frac{1}{6}$
 D) $\frac{5}{36}$

16. [1,7 ball]

Из восьми цифр 1, 2, 3, ..., 8 составлены все возможные **восьмизначные натуральные числа, в которых цифры не повторяются**.

Среди составленных чисел сколько таких, в которых **цифры 1 и 7 стоят рядом (в соседних разрядах)**?

- A) 10080
 B) 10800
 C) 5040
 D) 40320

17. [0,9 ball]

Сколько, среди представленных ниже, **пустых множеств**? Здесь N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, I – множество иррациональных чисел, R – множество действительных чисел.

- I) $A = \{x \mid 2024x^2 - 2023x - 1 = 0, x \in Z\}$;
 II) $B = \{x \mid (7x - 22)(13x + 7)(17x - 7) = 0, x \in I\}$;
 III) $C = \{x \mid (x - 5)! = 6! \cdot 7!, x \in N\}$;
 IV) $D = \{x \mid x^2 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 0, x \in R\}$
- A) 4
 B) 1
 C) 3
 D) 2

18. [0,9 ball]

Вычислите $\frac{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4)}{(5^4 + 4)(9^4 + 4)(13^4 + 4)}$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

19. [1,7 ball]

Бригаде укладчиков кирпичей необходимо построить стены дома, общий объём которых равен 432 м^3 . Объём стен поделили поровну между всеми членами бригады. Но еще до начала работ 4 человека покинули бригаду и каждому из оставшихся членов бригады пришлось построить на 9 м^3 больше стен, чем планировалось.

Сколько человек было в бригаде изначально?

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

20. [0,9 ball]

Сколько действительных корней имеет уравнение $\arccos(4x^2 - 3x - 2) + \arccos(3x^2 - 8x - 4) = \pi$?

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

21. [1,7 ball]

Если для положительных чисел x и y верны равенства $x^2 + y^2 = 1$ и $(3x - 4x^3)(3y - 4y^3) = -\frac{1}{2}$, то найдите значение $x + y$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

22. [0,9 ball]

Найдите сумму положительных действительных корней (или действительный корень, если он единственный) уравнения $\frac{111}{x} + \frac{111}{x^2} - \frac{11}{x^3} = 11$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

23. [1,7 ball]

Найдите произведение действительных корней уравнения $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

24. [2,4 ball]

Найдите сумму действительных корней (или действительный корень, если он единственный) уравнения $(1+x)^2 + (2+x)^3 + (3+x)^4 = 2$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

25. [2,4 ball]

Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx + 1$ является квадратом некоторого многочлена.

Найдите наибольшее возможное значение выражения $a^2 + b^2$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваш ответ в лист ответов.

26. [0,9 ball]

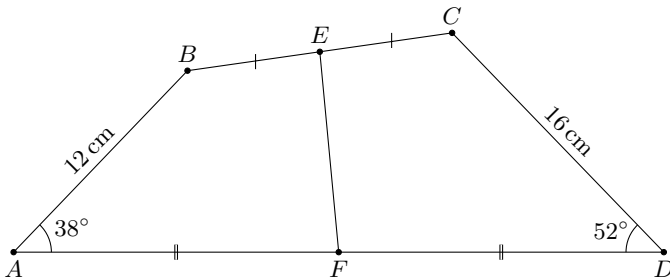
Найдите значение производной функции $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ в точке $x_0 = 0$.

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

27. [1,7 ball]

На рисунке изображён выпуклый четырёхугольник $ABCD$.



Если $BE = EC$, $AF = FD$, $\angle BAD = 38^\circ$, $\angle CDA = 52^\circ$, $AB = 12$ см и $CD = 16$ см, то найдите длину (см) отрезка EF .

Ответ: _____

Внимание! Перепишите ваши ответы в лист ответов.

28-30.

По имеющимся данным выполните тестовые задания 28, 29, 30.

Треугольник, площадью 36 см^2 , вращали (на 360°) вокруг одной из его сторон. Объём, полученного путём вращения, тела равен $192\pi \text{ см}^3$, а площадь полной поверхности равна $216\pi \text{ см}^2$.

Задания		Ответы
28.	[0,9 балла] Найдите длину (см) стороны треугольника, вокруг которой производили вращение.	A) 9 B) 10 C) 17
29.	[1,7 балла] Найдите половину периметра (см) данного треугольника.	D) 18 E) 24
30.	[2,4 балла] Найдите длину (см) наибольшей стороны данного треугольника.	F) 27

